

# Mini-curso: Modelo de Anderson

## Parte 1: introducción y objetos básicos

Christian Sadel



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DE CHILE

*Escuela Doctoral  
en Probabilidades  
y Sistemas  
Dinámicos*

8 al 19 de octubre de 2018

## Section 1

Introducción a la mecánica cuántica, su formulación matemática y al modelo de Anderson

## The Nobel Prize in Physics 1977



**Philip Warren  
Anderson**

Prize share: 1/3



**Sir Nevill Francis  
Mott**

Prize share: 1/3



**John Hasbrouck van  
Vleck**

Prize share: 1/3

The Nobel Prize in Physics 1977 was awarded jointly to Philip Warren Anderson, Sir Nevill Francis Mott and John Hasbrouck van Vleck *"for their fundamental theoretical investigations of the electronic structure of magnetic and disordered systems"*.

El estudio de operadores aleatorios en física empecé con un artículo de Philip Warren Anderson en 1958.

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 109, NUMBER 5

MARCH 1, 1958

## Absence of Diffusion in Certain Random Lattices

P. W. ANDERSON

*Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, New Jersey*

(Received October 10, 1957)

This paper presents a simple model for such processes as spin diffusion or conduction in the "impurity band." These processes involve transport in a lattice which is in some sense random, and in them diffusion is expected to take place via quantum jumps between localized sites. In this simple model the essential randomness is introduced by requiring the energy to vary randomly from site to site. It is shown that at low enough densities no diffusion at all can take place, and the criteria for transport to occur are given.

### I. INTRODUCTION

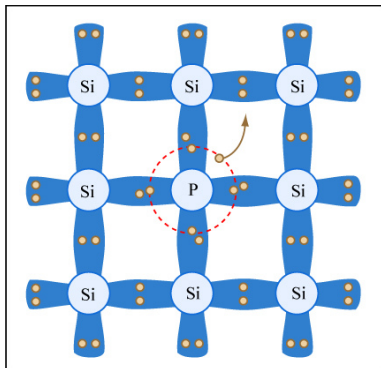
A NUMBER of physical phenomena seem to involve quantum-mechanical motion, without any particular thermal activation, among sites at which the mobile entities (spins or electrons, for example) may be localized. The clearest case is that of spin diffusion<sup>1,2</sup>; another might be the so-called impurity band conduction at low concentrations of impurities. In such

reasonably well, and to prove a theorem about the model. The theorem is that at sufficiently low densities, transport does not take place; the exact wave functions are localized in a small region of space. We also obtain a fairly good estimate of the critical density at which the theorem fails. An additional criterion is that the forces be of sufficiently short range—actually, falling off as  $r \rightarrow \infty$  faster than  $1/r^2$ —and we derive a rough estimate of the rate of transport in the  $V \propto 1/\epsilon^3$  case.

- Ejemplo 1: Semi-conductores dopados: En semi-conductores dopados hay un átomo o material de base (por ejemplo silicio) que está cambiado a un otro átomo en algunos lugares (por ejemplo fósforo).

# Por qué sistemas desordenados / aleatorios

- Ejemplo 1: Semi-conductores dopados: En semi-conductores dopados hay un átomo o material de base (por ejemplo silicio) que esta cambiado a un otro átomo en algunos lugares (por ejemplo fósforo).



- Ejemplo 1: Semi-conductores dopados: En semi-conductores dopados hay un átomo o material de base (por ejemplo silicio) que está cambiado a un otro átomo en algunos lugares (por ejemplo fósforo).
- El proceso de dopaje es **aleatorio**, el nivel de energía de 'extra'-electrón de fósforo es dependiente de todo entorno y es aleatorio.

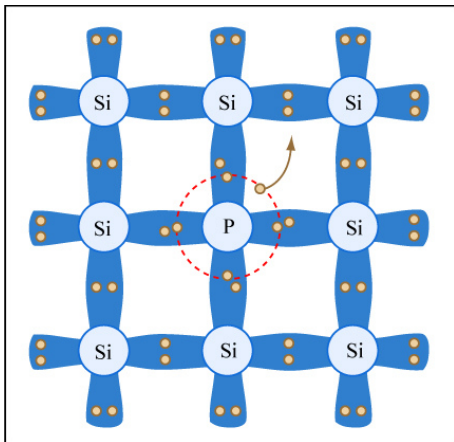
- Ejemplo 1: Semi-conductores dopados: En semi-conductores dopados hay un átomo o material de base (por ejemplo silicio) que está cambiado a un otro átomo en algunos lugares (por ejemplo fósforo).
- El proceso de dopaje es **aleatorio**, el nivel de energía de 'extra'-electrón de fósforo es dependiente de todo entorno y es aleatorio.
- Se puede controlar la densidad de dopaje muy precisamente, pero no exactamente, los átomos de fósforo no forman un cristal perfecto.



- Ejemplo 1: Semi-conductores dopados: En semi-conductores dopados hay un átomo o material de base (por ejemplo silicio) que esta cambiado a un otro átomo en algunos lugares (por ejemplo fósforo).
- El proceso de dopaje es **aleatorio**, el nivel de energía de 'extra'-electrón de fósforo es dependiente de todo entorno y es aleatorio.
- Se puede controlar la densidad de dopaje muy precisamente, pero no exactamente, los átomos de fósforo no forman un cristal perfecto.
- Ejemplo 2: Cristal con defectos: No hay un cristal perfecto, siempre hay defectos, los lugares son aleatorios

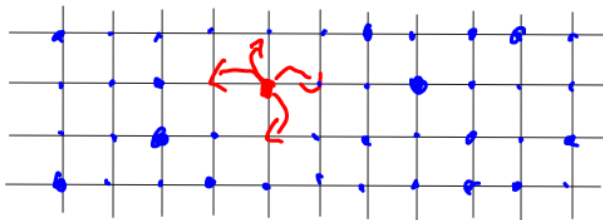
# Modelo de Anderson

- Modelo: La partícula se puede saltar a los lugares de vecinos y los niveles de energía son aleatorios.



# Modelo de Anderson

- Modelo: La partícula se puede saltar a los lugares de vecinos y los niveles de energía son aleatorios.



*Nivel de energía es aleatorio*

- Una partícula es descrito por un 'estado'. Estados puros son vectores unitarios en un espacio de Hilbert.

- Una partícula es descrito por un 'estado'. Estados puros son vectores unitarios en un espacio de Hilbert.
- Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial  $\mathbb{H}$ , complejo, con una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (producto escalar) de  $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que:
  - $\langle \lambda \mathbf{u}, \gamma \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda} \gamma \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  para  $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$  y  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}$  (version física)
  - $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  para  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{H}$ .
  - $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{H} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  (en particular:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}$ ).
  - $\mathbb{H}$  es completo referente la norma  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ .

- Una partícula es descrito por un 'estado'. Estados puros son vectores unitarios en un espacio de Hilbert.
- Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial  $\mathbb{H}$ , complejo, con una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (producto escalar) de  $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que:
  - $\langle \lambda \mathbf{u}, \gamma \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda} \gamma \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  para  $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$  y  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}$  (version física)
  - $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$  para  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{H}$ .
  - $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{H} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  (en particular:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}$ ).
  - $\mathbb{H}$  es completo referente la norma  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ .

- Vamos a trabajar en 'espacios discretos', entonces en el espacio de Hilbert  $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{G}) = \{ \mathbf{u} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in \mathbb{G}} |\mathbf{u}(x)|^2 < \infty \}$

donde  $\mathbb{G}$  es un conjunto numerable (los plazos, donde se puede encontrar la partícula)

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{x \in \mathbb{G}} \overline{\mathbf{u}(x)} \mathbf{v}(x), \quad \|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{x \in \mathbb{G}} |\mathbf{u}(x)|^2.$$

- $\ell^2(\mathbb{G}) = \{\mathbf{u} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in \mathbb{G}} |\mathbf{u}(x)|^2 < \infty\}$ ,  $\mathbb{G}$  numerable.
- $\psi \in \ell^2(\mathbb{G})$  es un estado (puro) si  $\|\psi\|^2 = \sum_{x \in \mathbb{G}} |\psi(x)|^2 = 1$ .

- $\ell^2(\mathbb{G}) = \{\mathbf{u} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in \mathbb{G}} |\mathbf{u}(x)|^2 < \infty\}$ ,  $\mathbb{G}$  numerable.
- $\psi \in \ell^2(\mathbb{G})$  es un estado (puro) si  $\|\psi\|^2 = \sum_{x \in \mathbb{G}} |\psi(x)|^2 = 1$ .
- Interpretación:  $|\psi(x)|^2$  es la **probabilidad de encontrar** la partícula en el **lugar**  $x \in \mathbb{G}$ .
- Eso es la 'probabilidad intrínseca' de mecánica cuántica - no es la probabilidad que viene de modelo de Anderson. En el formalismo de mecánica cuántica el movimiento de estado  $\psi(t)$  de tiempo  $t$  es determinista. Dónde se puede encontrar la partícula es aleatorio.



- $\ell^2(\mathbb{G}) = \{ \mathbf{u} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in \mathbb{G}} |\mathbf{u}(x)|^2 < \infty \}$ ,  $\mathbb{G}$  numerable.
- $\psi \in \ell^2(\mathbb{G})$  es un estado (puro) si  $\|\psi\|^2 = \sum_{x \in \mathbb{G}} |\psi(x)|^2 = 1$ .
- Interpretación:  $|\psi(x)|^2$  es la **probabilidad de encontrar** la partícula en el **lugar**  $x \in \mathbb{G}$ .
- Eso es la 'probabilidad intrínseca' de mecánica cuántica - no es la probabilidad que viene de modelo de Anderson. En el formalismo de mecánica cuántica el movimiento de estado  $\psi(t)$  de tiempo  $t$  es determinista. Dónde se puede encontrar la partícula es aleatorio.
- El movimiento de estado  $\psi(t)$  de tiempo  $t$  es descrito por un operador  $H$  auto-adjunto sobre  $\ell^2(\mathbb{G})$ .  $H$  se llama *Hamiltoniano*

- $\ell^2(\mathbb{G}) = \{ \mathbf{u} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in \mathbb{G}} |\mathbf{u}(x)|^2 < \infty \}$ ,  $\mathbb{G}$  numerable.
- $\psi \in \ell^2(\mathbb{G})$  es un estado (puro) si  $\|\psi\|^2 = \sum_{x \in \mathbb{G}} |\psi(x)|^2 = 1$ .
- Interpretación:  $|\psi(x)|^2$  es la **probabilidad de encontrar** la partícula en el **lugar**  $x \in \mathbb{G}$ .
- Eso es la 'probabilidad intrínseca' de mecánica cuántica - no es la probabilidad que viene de modelo de Anderson. En el formalismo de mecánica cuántica el movimiento de estado  $\psi(t)$  de tiempo  $t$  es determinista. Dónde se puede encontrar la partícula es aleatorio.
- El movimiento de estado  $\psi(t)$  de tiempo  $t$  es descrito por un operador  $H$  auto-adjunto sobre  $\ell^2(\mathbb{G})$ .  $H$  se llama *Hamiltoniano*
- En el modelo de Anderson también el movimiento del estado  $\psi(t)$  va a ser aleatorio en el sentido que el Hamiltoniano va a ser aleatorio.

- Sea  $\mathbb{H}$  espacio de Hilbert, un operador lineal  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  sobre  $\mathbb{H}$  es acotado si

$$\|T\| := \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| < \infty$$

El conjunto de operadores lineales acotados se escribe  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ .

# Operadores acotados, auto-adjuntos, unitarios

- Sea  $\mathbb{H}$  espacio de Hilbert, un operador lineal  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  sobre  $\mathbb{H}$  es acotado si

$$\|T\| := \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| < \infty$$

El conjunto de operadores lineales acotados se escribe  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ .

- Sea  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ . El operador adjunto de  $T$  se escribe  $T^*$  y es dado por

$$\forall u, v \in \mathbb{H} : \langle u, Tv \rangle = \langle T^*u, v \rangle = \overline{\langle v, T^*u \rangle}$$

- $H \in \mathcal{B}(H)$  es auto-adjunto si  $H = H^*$ , es decir:

$$\forall u, v \in \mathbb{H} : \langle u, Hv \rangle = \langle Hu, v \rangle = \overline{\langle v, Hu \rangle}.$$

# Operadores acotados, auto-adjuntos, unitarios

- Sea  $\mathbb{H}$  espacio de Hilbert, un operador lineal  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  sobre  $\mathbb{H}$  es acotado si

$$\|T\| := \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \|T\mathbf{u}\| < \infty$$

El conjunto de operadores lineales acotados se escribe  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ .

- Sea  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ . El operador adjunto de  $T$  se escribe  $T^*$  y es dado por

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H} : \langle \mathbf{u}, T\mathbf{v} \rangle = \langle T^*\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, T^*\mathbf{u} \rangle}$$

- $H \in \mathcal{B}(H)$  es auto-adjunto si  $H = H^*$ , es decir:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H} : \langle \mathbf{u}, H\mathbf{v} \rangle = \langle H\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, H\mathbf{u} \rangle}.$$

- $U \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$  es unitario si cumple uno de propiedades equivalentes

a)  $UU^* = \mathbf{1} = U^*U$  donde  $\mathbf{1}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ ,    b)  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle U\mathbf{u}, U\mathbf{v} \rangle$

- Sea  $\psi_t$  el estado de partícula de tiempo  $t$ . El movimiento cuántica es dado por un operador auto-adjunto  $H$  sobre  $\ell^2(\mathbb{G})$  y cumple (en unidades naturales,  $\hbar = 1$ ) la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \psi_t = H \psi_t .$$

- Sea  $\psi_t$  el estado de partícula de tiempo  $t$ . El movimiento cuántica es dado por un operador auto-adjunto  $H$  sobre  $\ell^2(\mathbb{G})$  y cumple (en unidades naturales,  $\hbar = 1$ ) la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \psi_t = H \psi_t .$$

- Dado  $\psi_0$  la solución está

$$\psi_t = e^{-itH} \psi_0 \quad \text{con} \quad e^{-itH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itH)^n}{n!}$$

- Sea  $\psi_t$  el estado de partícula de tiempo  $t$ . El movimiento cuántica es dado por un operador auto-adjunto  $H$  sobre  $\ell^2(\mathbb{G})$  y cumple (en unidades naturales,  $\hbar = 1$ ) la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \psi_t = H \psi_t .$$

- Dado  $\psi_0$  la solución está

$$\psi_t = e^{-itH} \psi_0 \quad \text{con} \quad e^{-itH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itH)^n}{n!}$$

- Para la norma en  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$  se puede probar fácilmente  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  y con eso  $\|(itH)^n\| \leq \|itH\|^n = |t|^n \|H\|^n$  que implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|(-itH)^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \|H\|^n}{n!} = e^{|t|^n \|H\|^n} < \infty .$$

Entonces la serie para  $e^{-itH}$  converge absolutamente y por eso converge en  $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{G}))$ .



## Teorema

Si  $H$  esta acotada y auto-adjunto, entonces  $U_t = e^{-itH}$  es unitario (para  $t \in \mathbb{R}$ ) y  $U_t^* = U_{-t}$ .

## demostración.

primero:  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es continua referente la norma inducida, se puede cambiar limites con producto escalar. Con convergencia absoluta obtenemos para  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ell^2(\mathbb{G}) = \mathbb{H}$  que

$$\langle \mathbf{u}, e^{-itH} \mathbf{v} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \mathbf{u}, \frac{(-it)^n}{n!} H^n \mathbf{v} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{(it)^n}{n!} H^n \mathbf{u}, \mathbf{v} \right\rangle = \langle e^{itH} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

entonces  $U_t^* = U_{-t}$ . Con formula del producto de series absolutamente convergentes se obtiene  $e^{aH} e^{bH} = e^{(a+b)H}$  y con eso

$$U_t U_t^* = \mathbf{1} = U_t^* U_t.$$



## Proposición

*Si  $U$  es unitario y  $\psi \in \ell^2(\mathbb{G})$  un estado, entonces  $U\psi$  es un estado:*

$$\|U\psi\|^2 = \langle U\psi, U\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 1$$

## Corolario

*Si  $H$  es (acotado) auto-adjunto y  $\psi_0$  un estado, entonces  $\psi_t = e^{-itH}\psi_0$  es un estado. (Entonces  $|\psi_t(x)|^2$  define una medida de probabilidad sobre  $\mathbb{G}$ .)*

## Proposición

Si  $U$  es unitario y  $\psi \in \ell^2(\mathbb{G})$  un estado, entonces  $U\psi$  es un estado:

$$\|U\psi\|^2 = \langle U\psi, U\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 1$$

## Corolario

Si  $H$  es (acotado) auto-adjunto y  $\psi_0$  un estado, entonces  $\psi_t = e^{-itH}\psi_0$  es un estado. (Entonces  $|\psi_t(x)|^2$  define una medida de probabilidad sobre  $\mathbb{G}$ .)

## Interpretación de términos de Hamiltoniano

Sea  $\delta_x \in \ell^2(\mathbb{G})$ ,  $\delta_x(y) = 0$  si  $y \neq x$  y  $\delta_x(x) = 1$ . Si  $x \neq y$ ,  $\langle \delta_x, H\delta_y \rangle \neq 0$ , la partícula puede saltar de  $x$  a  $y$  (energía cinética) y eso pasa con tasa  $|\langle \delta_x, H\delta_y \rangle|$ .  $V(x) = \langle \delta_x, H\delta_x \rangle \in \mathbb{R}$  es un potencial (energía de lugar) en  $x$ .

## Definición y proposición, Conservación de energía

Para un estado  $\psi$ , la **esperanza de energía** es dado por  $\langle \psi, H\psi \rangle \in \mathbb{R}$  que es constante:  $\langle \psi_t, H\psi_t \rangle = \langle \psi_0, e^{itH}He^{-itH}\psi_0 \rangle = \langle \psi_0, H\psi_0 \rangle$ .

# Operador de Schrödinger en $\mathbb{Z}^d$

- Considera  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$ . Puntos  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  son vecinos en  $\mathbb{Z}^d$  si  $\|x - y\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j - y_j| = 1$ , es decir  $x = y + e_j$  para algo  $j = 1, \dots, d$ , donde  $(e_j)_{j=1}^d$  es la base canónica en  $\mathbb{R}^d$ .

# Operador de Schrödinger en $\mathbb{Z}^d$

- Considera  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$ . Puntos  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  son vecinos en  $\mathbb{Z}^d$  si  $\|x - y\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j - y_j| = 1$ , es decir  $x = y + e_j$  para algo  $j = 1, \dots, d$ , donde  $(e_j)_{j=1}^d$  es la base canónica en  $\mathbb{R}^d$ .
- El Laplaciano discreto es dado por

$$(\Delta_{\mathbb{Z}^d} \psi)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d: \|x-y\|_1=1} \psi(y) = \sum_{j=1}^d \psi(x + e_j)$$

# Operador de Schrödinger en $\mathbb{Z}^d$

- Considera  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$ . Puntos  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  son vecinos en  $\mathbb{Z}^d$  si  $\|x - y\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j - y_j| = 1$ , es decir  $x = y + e_j$  para algo  $j = 1, \dots, d$ , donde  $(e_j)_{j=1}^d$  es la base canónica en  $\mathbb{R}^d$ .
- El Laplaciano discreto es dado por

$$(\Delta_{\mathbb{Z}^d} \psi)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d: \|x-y\|_1=1} \psi(y) = \sum_{j=1}^d \psi(x + e_j)$$

- Un potencial  $V$  es un operador de multiplicación con valores reales:

$$(V\psi)(x) = V(x) \psi(x) \quad \text{con} \quad V(x) \in \mathbb{R}.$$

# Operador de Schrödinger en $\mathbb{Z}^d$

- Considera  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$ . Puntos  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  son vecinos en  $\mathbb{Z}^d$  si  $\|x - y\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j - y_j| = 1$ , es decir  $x = y + e_j$  para algo  $j = 1, \dots, d$ , donde  $(e_j)_{j=1}^d$  es la base canónica en  $\mathbb{R}^d$ .
- El Laplaciano discreto es dado por

$$(\Delta_{\mathbb{Z}^d} \psi)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d: \|x-y\|_1=1} \psi(y) = \sum_{j=1}^d \psi(x + e_j)$$

- Un potencial  $V$  es un operador de multiplicación con valores reales:

$$(V\psi)(x) = V(x) \psi(x) \quad \text{con} \quad V(x) \in \mathbb{R}.$$

- Un operador de Schrödinger en  $\mathbb{Z}^d$  es dado por una suma de Laplaciano y un potencial:  $H = -\Delta_{\mathbb{Z}^d} + V$ .

# Tipos de dinámica

- Sea  $H$  operador de Schrödinger en  $\mathbb{Z}^d$  (sobre  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ). Se interesa el 'tipo de dinámica' cuando empezamos con una partícula localizada en  $x$ , es decir  $\psi_0 = \delta_x$ .



- Sea  $H$  operador de Schrödinger en  $\mathbb{Z}^d$  (sobre  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ). Se interesa el 'tipo de dinámica' cuando empezamos con una partícula localizada en  $x$ , es decir  $\psi_0 = \delta_x$ .
- La probabilidad de encontrar la partícula en  $y$  después de tiempo  $t$  es dado por  $|\langle \delta_y, e^{-itH} \delta_x \rangle|^2$ . Los momentos de distancia  $d(x, y) = \|x - y\|$  que se movió la partícula referente este distribución en  $y$  son dado por

$$M_p(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \|x - y\|^p |\langle \delta_y, e^{-itH} \delta_x \rangle|^2$$

- Sea  $H$  operador de Schrödinger en  $\mathbb{Z}^d$  (sobre  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ). Se interesa el 'tipo de dinámica' cuando empezamos con una partícula localizada en  $x$ , es decir  $\psi_0 = \delta_x$ .
- La probabilidad de encontrar la partícula en  $y$  después de tiempo  $t$  es dado por  $|\langle \delta_y, e^{-itH} \delta_x \rangle|^2$ . Los momentos de distancia  $d(x, y) = \|x - y\|$  que se movió la partícula referente esta distribución en  $y$  son dado por

$$M_p(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \|x - y\|^p |\langle \delta_y, e^{-itH} \delta_x \rangle|^2$$

- Decimos que la partícula (referente el momento  $p$ , típico  $p = 2$ )
  - esta estrictamente localizada si  $\sup_t M_p(t) \leq C_p < \infty$
  - se mueve balístico si  $M_p(t) \sim t^p$  (como con velocidad fija)
  - se mueve difusivo si  $M_p(t) \sim t^{p/2}$  (como camino aleatorio)
  - se mueve super-difusivo si  $C_p t^{\alpha p} \leq M_p(t) = o(t^p)$ ,  $1 > \alpha > \frac{1}{2}$ ,  $C_p > 0$
  - se mueve sub-difusivo si  $C_p t^{\alpha p} \leq M_p(t) = o(t^{p/2})$ ,  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ,  $C_p > 0$

- Sea  $\nu$  una distribución de probabilidad en  $\mathbb{R}$  (medida de Borel, positivo,  $\nu(\mathbb{R}) = 1$ ), considera el espacio producto (espacio de probabilidad)  $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}, \nu^{\times \mathbb{Z}^d}) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- El potencial **independiente y idénticamente distribuido** (corto: **i.i.d.**) con distribución  $\nu$  en un vertex es dado por  $V_\omega(x) = \omega_x$  donde  $V_\omega(x)$  tiene interpretación de una variable aleatoria  $V(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con distribución  $\mathbb{P}$  para  $\omega$ .

- Sea  $\nu$  una distribución de probabilidad en  $\mathbb{R}$  (medida de Borel, positivo,  $\nu(\mathbb{R}) = 1$ ), considera el espacio producto (espacio de probabilidad)  $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}, \nu^{\times \mathbb{Z}^d}) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- El potencial **independiente y idénticamente distribuido** (corto: **i.i.d.**) con distribución  $\nu$  en un vertex es dado por  $V_\omega(x) = \omega_x$  donde  $V_\omega(x)$  tiene interpretación de una variable aleatoria  $V(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con distribución  $\mathbb{P}$  para  $\omega$ .
- La familia  $(V(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$  de variables aleatorias sobre  $\Omega$  con  $V(x) : \omega \mapsto V_\omega(x)$  es independiente y cada  $V(x)$  es  $\nu$ -distribuido.
- El modelo de Anderson es dado por el operador aleatorio de Schrödinger con un potencial i.i.d.

$$H : \Omega \rightarrow \text{Her}(\mathbb{Z}^d), \quad \omega \mapsto H_\omega = -\Delta_{\mathbb{Z}^d} + V_\omega$$

donde  $\text{Her}(\mathbb{Z}^d)$  es el conjunto de operadores auto-adjuntos sobre  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ .

- Típicamente se asume que el potencial tiene esperanza 0 y una varianza positiva finita,  $\mathbb{E}(V(x)) = 0$ ,  $0 < \mathbb{E}(V(x)^2) < \infty$ . aquí:  $\mathbb{E}(V(x)) = \int V_\omega(x) d\mathbb{P}(\omega)$ .
- Para investigar diferencias de gran y pequeño desorden, se puede introducir una constante de acoplamiento. En física se usa típicamente  $\lambda$  - conflicto con notación en matemáticas:  $\lambda$  normalmente reservado para parámetro espectral (por ejemplo: auto-valores) - en física este parámetro se reemplaza con  $E$  (energía).

- Típicamente se asume que el potencial tiene esperanza 0 y una varianza positiva finita,  $\mathbb{E}(V(x)) = 0$ ,  $0 < \mathbb{E}(V(x)^2) < \infty$ . aquí:  $\mathbb{E}(V(x)) = \int V_\omega(x) d\mathbb{P}(\omega)$ .
- Para investigar diferencias de gran y pequeño desorden, se puede introducir una constante de acoplamiento. En física se usa típicamente  $\lambda$  - conflicto con notación en matemáticas:  $\lambda$  normalmente reservado para parámetro espectral (por ejemplo: auto-valores) - en física este parámetro se reemplaza con  $E$  (energía).
- Consideramos la familia de modelos de Anderson:

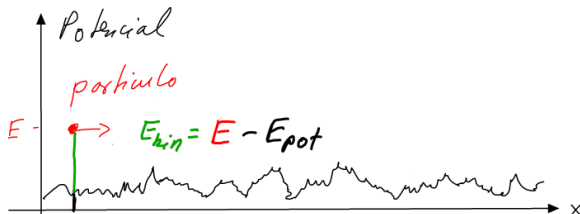
$$H_\lambda = -\Delta + \lambda V, \quad H_{\lambda,\omega} = -\Delta + \lambda V_\omega$$

Desorden pequeño:  $0 < \lambda \ll 1$  (es decir se estudia el modelo en limite  $\lambda \rightarrow 0$  pero no igual a 0)

Desorden grande:  $\lambda \gg 1$  ( $\lambda$  grande, se estudia limite  $\lambda \rightarrow \infty$ ).

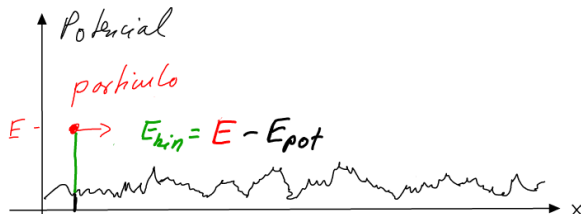
# Sorpresa de Física: Localización

- En una dimensión (cable desordenado) y en dos dimensiones (así dicen los físicos) un desorden pequeño inmediatamente causa localización. (el nivel de energía en un lugar = potencial)



# Sorpresa de Física: Localización

- En una dimensión (cable desordenado) y en dos dimensiones (así dicen los físicos) un desorden pequeño inmediatamente causa localización. (el nivel de energía en un lugar = potencial)

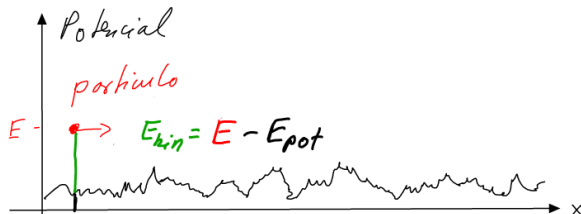


- Una partícula clásica no sea localizado. Efecto 'túnel': normalmente partículas cuánticas son menos localizada como clásicas.



# Sorpresa de Física: Localización

- En una dimensión (cable desordenado) y en dos dimensiones (así dicen los físicos) un desorden pequeño inmediatamente causa localización. (el nivel de energía en un lugar = potencial)



- Una partícula clásica no sea localizado. Efecto 'túnel': normalmente partículas cuánticas son menos localizada como clásicas.
- Partículas cuánticas también tienen 'fase' como olas. Con el potencial aleatorio (nivel de energía) hay difracción aleatoria y mucha interferencia negativa. Este atrapa el y localiza la partícula cuántica.

- La interferencia negativa es mas probable si el desorden es mas grande: En cada dimension hay localización para un desorden grande (por ejemplo: Fröhlich-Spencer (1983), Aizenman-Molchanov (1993) )

- La interferencia negativa es mas probable si el desorden es mas grande: En cada dimension hay localización para un desorden grande (por ejemplo: Fröhlich-Spencer (1983), Aizenman-Molchanov (1993) )
- Métodos perturbativos:  $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ .  $-\Delta$  es parte cinético sin  $-\Delta$  no hay movimiento,  $V_\omega$  es trivialmente localizado. Si  $\lambda$  es grande (desorden grande),  $-\Delta$  es perturbación y la localización persiste.

- La interferencia negativa es mas probable si el desorden es mas grande: En cada dimension hay localización para un desorden grande (por ejemplo: Fröhlich-Spencer (1983), Aizenman-Molchanov (1993) )
- Métodos perturbativos:  $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ .  $-\Delta$  es parte cinético sin  $-\Delta$  no hay movimiento,  $V_\omega$  es trivialmente localizado. Si  $\lambda$  es grande (desorden grande),  $-\Delta$  es perturbación y la localización persiste.
- En una dimension el sistema es especial, solamente hay dos direcciones para la partícula. Para cada desorden (también pequeño) tenemos localización (Goldsheid-Molchanov-Pastur (1977), Kunz-Soulliard (1980) )

- La interferencia negativa es mas probable si el desorden es mas grande: En cada dimension hay localización para un desorden grande (por ejemplo: Fröhlich-Spencer (1983), Aizenman-Molchanov (1993) )
- Métodos perturbativos:  $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ .  $-\Delta$  es parte cinético sin  $-\Delta$  no hay movimiento,  $V_\omega$  es trivialmente localizado. Si  $\lambda$  es grande (desorden grande),  $-\Delta$  es perturbación y la localización persiste.
- En una dimension el sistema es especial, solamente hay dos direcciones para la partícula. Para cada desorden (también pequeño) tenemos localización (Goldsheid-Molchanov-Pastur (1977), Kunz-Soulliard (1980) )
- Nota: También se han estudiado sistemas con desorden cuasi-periódico, especialmente en dimension  $d = 1$ . Analizar estos y exponentes de Lyapunov en sistema dinámica relacionada fue un gran parte de medalla de Fields de Artur Avila. (→ Global theory of one-frequency Schrödinger operators, Acta Math. 215, Vol. 1, 1-54)

- Los Físicos 'saben' de experimentos que en sistemas en tres dimensiones hay des-localización y difusión cuántica (movimiento difusivo) para un desorden pequeño.  
El movimiento de difusión es relacionada con un material conductor con una conductividad positiva y finita. (Movimiento super-difusivo o balístico sea conductividad infinita)
- Idea :  $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ , para  $\lambda$  pequeño la des-localización de  $-\Delta$  persiste...

- Los Físicos 'saben' de experimentos que en sistemas en tres dimensiones hay des-localización y difusión cuántica (movimiento difusivo) para un desorden pequeño.  
El movimiento difusión e relacionada con un material conductor con una conductividad positiva y finita. (Movimiento super-difusivo o balístico sea conductividad infinita)
- Idea :  $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ , para  $\lambda$  pequeño la des-localización de  $-\Delta$  persiste...
- Pero:  $-\Delta$  es perfectamente periódico y la de-localización viene de esta propiedad. Un potencial aleatorio destruye la periodicidad! Además sabemos que un argumento así no funciona en dimensión 1. Entonces, el argumento tiene que ser sutil.

- Los Físicos 'saben' de experimentos que en sistemas en tres dimensiones hay des-localización y difusión cuántica (movimiento difusivo) para un desorden pequeño.  
El movimiento difusión e relacionada con un material conductor con una conductividad positiva y finita. (Movimiento super-difusivo o balístico sea conductividad infinita)
- Idea :  $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ , para  $\lambda$  pequeño la des-localización de  $-\Delta$  persiste...
- Pero:  $-\Delta$  es perfectamente periódico y la de-localización viene de esta propiedad. Un potencial aleatorio destruye la periodicidad! Además sabemos que un argumento así no funciona en dimensión 1. Entonces, el argumento tiene que ser sutil.
- GRAN PROBLEMA EN MATEMÁTICA!



- Los Físicos 'saben' de experimentos que en sistemas en tres dimensiones hay des-localización y difusión cuántica (movimiento difusivo) para un desorden pequeño.  
El movimiento difusión e relacionada con un material conductor con una conductividad positiva y finita. (Movimiento super-difusivo o balístico sea conductividad infinita)
- Idea :  $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ , para  $\lambda$  pequeño la des-localización de  $-\Delta$  persiste...
- Pero:  $-\Delta$  es perfectamente periódico y la de-localización viene de este propiedad. Un potencial aleatorio destruye la periodicidad! Además sabemos que un argumento así no funciona en dimension 1. Entonces, el argumento tiene que ser sutil.
- GRAN PROBLEMA EN MATEMÁTICA!
- Para obtener ideas se estudia sistemas / modelos mas generales, no todos tienen una relación directa con un sistema real de física...

## Section 2

# Teoría básica de medidas

- Una sigma-algebra ( $\sigma$ -algebra) sobre  $\mathbb{R}$  es un sistema de conjuntos  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tal que: a)  $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$ , b) para  $A \in \mathcal{A}$  tambien  $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{A}$  y c) para una cantidad numerable de elementos  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

tenemos  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

- La **sigma-algebra de Borel**  $\mathcal{B}$  es la sigma-algebra más pequeño que contiene todos los conjuntos abiertos  $\mathcal{T}$  en  $\mathbb{R}$ , es decir  $\mathcal{T} = \{O \subset \mathbb{R} : (\forall x \in O \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset O)\}$ ,

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{A}: \sigma\text{-algebra}, \mathcal{T} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}, \quad A \in \mathcal{B} \text{ se llama Borel-medible.}$$

- Una medida de Borel es una función  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $\mu(\emptyset) = 0$  y para  $A_n \in \mathcal{B}$  **disjuntos** ( $n \in \mathbb{N}$ ) tenemos

$$\mu \left( \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad (\sigma\text{-aditividad})$$

# Medidas de Borel y integral

- Una función de forma  $g(x) = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}(x)$  donde  $A_j \in \mathcal{B}$  es una función escalonada, el conjunto de estas funciones sea  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  y se define

$$\int g(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j)$$

- Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es medible si  $\forall A \in \mathcal{B} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ . Para  $f$  medible y  $f \geq 0$  se define

$$\int f(x) d\mu(x) = \sup_{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), 0 \leq g \leq f} \int g(x) d\mu(x) \in [0, \infty]$$

- Si  $f$  es medible podemos escribir  $f = f_+ - f_-$  donde  $f_{\pm}(x) = \max\{0, \pm f(x)\}$  son medibles y definimos

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f_+(x) d\mu(x) - \int f_-(x) d\mu(x)$$

si uno de integrales  $\int f_{\pm}(x) d\mu(x)$  como definido antes es finito.

- Una medida signada  $\tilde{\mu}$  es una diferencia de dos medidas  $\tilde{\mu} = \mu_+ - \mu_-$  tal que existe  $A \in \mathcal{B}$  con  $\mu_+(\mathbb{R} \setminus A) = 0 = \mu_-(A)$ . Para  $f$  medible y  $\mu$  medida signada definimos

$$\int f(x) d\tilde{\mu}(x) = \int f(x) d\mu_+(x) - \int f(x) d\mu_-(x)$$

si esta diferencia es bien definido en  $[-\infty, \infty]$ .

- Una medida de Borel  $\mu$  sobre  $\mathbb{R}$  es finito si  $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ . La medida  $\mu$  es una medida de probabilidad (o distribución de probabilidad) si  $\mu(\mathbb{R}) = 1$ .
- Una medida signada  $\tilde{\mu} = \mu_+ - \mu_-$  es finito si ambas partes,  $\mu_+$  y  $\mu_-$  son finita.
- Todas las medidas finitas de Borel sobre  $\mathbb{R}$  son regular: Para  $A \in \mathcal{B}$

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A, K \text{ compacto}} \mu(K) = \inf_{A \subset O, O \in \mathcal{T}} \mu(O)$$

- El conjunto de las funciones continuas acotadas de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  sea notado por  $C_b(\mathbb{R})$  que es un espacio de Banach con la norma  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .
- Para cada medida signada finita  $\tilde{\mu}$  la función

$$F_{\tilde{\mu}} : f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \mapsto \int f(x) d\tilde{\mu}(x) = \int \operatorname{Re} f d\tilde{\mu} + i \int \operatorname{Im} f d\tilde{\mu}$$

es una función lineal continua de  $C_b(\mathbb{R})$  a  $\mathbb{C}$ . Si  $\tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}'$  entonces  $F_{\tilde{\mu}} \neq F_{\tilde{\mu}'}$ . **Para  $F_\mu(f)$  escribimos simplemente  $\mu(f)$ .**

- Sean  $\mu_n, \mu$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) medidas (signadas) finitas de Borel sobre  $\mathbb{R}$ . Decimos que  $\mu_n$  converge **débilmente** a  $\mu$  para  $n \rightarrow \infty$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f) = \mu(f)$  para cada  $f \in C_b(\mathbb{R})$ .
- El conjunto de funciones continuas de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  con soporte compacto sea notado  $C_0(\mathbb{R})$ . Sean  $\mu_n, \mu$  medidas (signadas) localmente finitas (finitas en conjuntos compactos).  $\mu_n$  converge **vagamente** a  $\mu$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f) = \mu(f)$  para cada  $f \in C_0(\mathbb{R})$ .

## Comentarios:

- Definiciones: Una medida compleja es una suma  $\mu = \mu_r + i\mu_i$  donde  $\mu_r$  y  $\mu_i$  son medidas signadas.

El soporte de una medida (signada)  $\text{supp } \mu$  es el conjunto cerrado  $A$  más pequeño tal que  $\mu(\mathbb{R} \setminus A) = 0$ .

Una medida (positiva)  $\mu$  es  $\sigma$ -finita si  $\exists A_n \in \mathcal{B}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbb{R} = \bigcup A_n$ ,  $\mu(A_n) < \infty$ .

- Una medida de Borel sobre  $\mathbb{R}$  localmente finita también es regular y  $\sigma$ -finita.
- El espacio dual de  $C_b(\mathbb{R})$  es más grande que las medidas complejas finitas y es dado por las medidas de Radon en la compactación de Stone-Čech de  $\mathbb{R}$ .
- El espacio dual de  $C_0(\mathbb{R})$  es dado por las medidas complejas localmente finitas. La topología vaga es un ejemplo de una topología  $*$ -débil.
- El espacio dual de  $C(K)$  para  $K \subset \mathbb{R}$  compacto es dado por todas las medidas complejas finitas que tienen soporte en un subconjunto de  $K$ .

- La medida de Lebesgue,  $\text{Leb}$ , es la única medida de Borel sobre  $\mathbb{R}$  que cumple  $\text{Leb}([a, b]) = \text{Leb}((a, b)) = b - a$  para todo  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Para  $d\text{Leb}(x)$  se escribe simplemente  $dx$ .



- La medida de Lebesgue,  $\text{Leb}$ , es la única medida de Borel sobre  $\mathbb{R}$  que cumple  $\text{Leb}([a, b]) = \text{Leb}((a, b)) = b - a$  para todo  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Para  $d\text{Leb}(x)$  se escribe simplemente  $dx$ .
- Sea  $\mu$  una medida de Borel sobre  $\mathbb{R}$  y localmente finita.
  - $\mu$  es **absolutamente continua** si hay una función  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  medible tal que  $d\mu(x) = \rho(x)dx$ , es decir, para cada  $f$  medible donde el  $\mu(f)$  existe tenemos

$$\mu(f) = \int f(x) d\mu(x) = \int f(x) \rho(x) dx$$

Lema:  $\mu$  es absolutamente continua si y solamente si para cada  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $\text{Leb}(A) = 0$  tenemos  $\mu(A) = 0$ .

- $\mu$  es **continua** si  $\mu(\{a\}) = 0$  para cada  $a \in \mathbb{R}$ .
- $\mu$  es **singular** si hay  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $\text{Leb}(A) = 0$  y  $\mu(\mathbb{R} \setminus A) = 0$ .
- $\mu$  es **singular continua** si  $\mu$  es continua y singular.
- $\mu$  es **puro punto** si  $\mu = \sum_n c_n \delta_{x_n}$  con  $x_n \in \mathbb{R}$ ,  $c_n \geq 0$ , donde  $\delta_x(\{x\}) = 1$ ,  $\delta_x(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ .

## Teorema (Radon-Nikodym)

*Sea  $\mu$  una medida de Borel localmente finita en  $\mathbb{R}$ . Entonces, hay una única descomposición  $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$  tal que  $\mu_{ac}$  es absolutamente continua y  $\mu_s$  es singular.*

## Teorema

*Sea  $\mu_s$  una medida de Borel en  $\mathbb{R}$  que es singular y  $\sigma$ -finita. Entonces hay una única descomposición  $\mu_s = \mu_{sc} + \mu_{pp}$  tal que  $\mu_s$  es singular y  $\mu_{pp}$  es puro punto.*

## Corolario

*Sea  $\mu$  una medida de Borel localmente finita en  $\mathbb{R}$ . Entonces, hay una única descomposición  $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$  tal que  $\mu_{ac}$  es absolutamente continua,  $\mu_{sc}$  es singular continua y  $\mu_{pp}$  es puro punto.*

## Section 3

# Teoría espectral de operadores auto-adjuntos

# Definiciones básicas

- Sea  $\mathbb{H}$  un espacio de Hilbert y  $H$  un operador auto-adjunto acotado sobre  $\mathbb{H}$ .
- El conjunto resolvente de  $H$ ,  $\rho(H)$ , es dado por

$$\rho(H) := \{z \in \mathbb{C} : (H - z) \text{ es invertible, es decir } (H - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})\}.$$

El espectro de  $H$ ,  $\sigma(H)$ , es dado por  $\sigma(H) = \mathbb{C} \setminus \rho(H)$ .

- Para  $z \in \rho(H)$  el operador  $(H - z)^{-1}$  se llama operador resolvente o simplemente resolvente de  $H$  en  $z$ .

## Teorema

*Si  $H$  es auto-adjunto acotado entonces tenemos*

$$\sigma(H) \subset [-\|H\|, \|H\|] \subset \mathbb{R},$$

*Además,  $\sigma(H)$  es cerrado (y entonces compacto) y  $\rho(H)$  es abierto.*

# Calculo funcional para funciones continuas

- Para un polinomio  $p(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$  y un operador  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$  se define

$$p(H) = \sum_{n=0}^N c_n H^n, \quad \text{claramente, } p \mapsto p(H) \text{ es lineal}$$

## Teorema

*Si  $H$  es auto-adjunto y  $p \in \mathbb{C}[X]$  ( $p$  polinomio con coeficientes en  $\mathbb{C}$ ) tenemos  $\|p(H)\| = \sup_{x \in \sigma(H)} |p(x)|$*

# Calculo funcional para funciones continuas

- Para un polinomio  $p(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$  y un operador  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$  se define

$$p(H) = \sum_{n=0}^N c_n H^n, \quad \text{claramente, } p \mapsto p(H) \text{ es lineal}$$

## Teorema

Si  $H$  es auto-adjunto y  $p \in \mathbb{C}[X]$  ( $p$  polinomio con coeficientes en  $\mathbb{C}$ ) tenemos  $\|p(H)\| = \sup_{x \in \sigma(H)} |p(x)|$

## Teorema (Weierstrass)

Para cada función real continua  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  y cada conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}$  hay una sucesión de polinomios  $p_n \in \mathbb{R}[X]$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_{\infty, K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f(x) - p_n(x)| = 0.$$

# Calculo funcional para funciones continuas

- Para  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  y  $H$  un operador auto-adjunto acotado toma una sucesión de polinomios  $p_n$  tal que  $\|f - p_n\|_{\infty, \sigma(H)}$  converge a 0. Entonces,  $p_n(H)$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{B}(H)$  y se puede definir

$$f(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(H).$$

Para  $f \in C(\mathbb{R})$  se define  $f(H) = (\operatorname{Re} f)(H) + i(\operatorname{Im} f)(H)$ .

## Teorema

El operador  $\mathcal{F}_H : C_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ ,  $f \mapsto f(H)$  es lineal y continua. Si  $f|_{\sigma(H)} = g|_{\sigma(H)}$  entonces  $f(H) = g(H)$ .

Además,  $f(H)^* = \bar{f}(H)$ ,  $f(H)g(H) = (fg)(H)$  y

$$\|f(H)\| = \sup_{x \in \sigma(H)} |f(x)| = \|f\|_{\infty, \sigma(H)}.$$

Además, si  $f \geq 0$  entonces  $f(H)$  es un operador positivo, es decir  $\langle \mathbf{u}, f(H)\mathbf{u} \rangle \geq 0$  para cada  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ .

- Sea  $H$  un operador auto-adjunto acotado sobre  $\mathbb{H}$ , sea  $\psi \in \mathbb{H}$  y  $f \in C_b(\mathbb{R})$ . Se puede definir

$$\mu_\psi(f) := \langle \psi, f(H)\psi \rangle.$$



- Sea  $H$  un operador auto-adjunto acotado sobre  $\mathbb{H}$ , sea  $\psi \in \mathbb{H}$  y  $f \in C_b(\mathbb{R})$ . Se puede definir

$$\mu_\psi(f) := \langle \psi, f(H)\psi \rangle.$$

- Obviamente  $\mu_\psi : C_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  es lineal; si  $f|_{\sigma(H)} = g|_{\sigma(H)}$  entonces  $\mu_\psi(f) = \mu_\psi(g)$  y además tenemos

$$|\mu_\psi(f)| \leq \|\psi\| \|f(H)\psi\| \leq \|\psi\|^2 \|f(H)\| = \|\psi\|^2 \|f\|_{\infty, \sigma(H)}.$$

Entonces,  $\mu_\psi$  viene de un elemento de dual de  $C(\sigma(H))$ .

Además, para  $f \geq 0$  tenemos  $\mu_\psi(f) \geq 0$  y por eso  $\mu_\psi$  es una medida finita con soporte  $\text{supp } \mu_\psi \subset \sigma(H)$ ,  $\mu_\psi(f) = \int f(x) d\mu_\psi(x)$ .

- La medida  $\mu_\psi$  se llama la medida espectral de  $H$  en  $\psi$ .

- Si  $\psi$  es un estado tenemos

$\mu_\psi(\mathbb{R}) = \langle \psi, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(H)\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2 = 1$ , entonces  $\mu_\psi$  es una medida de probabilidad

- Si una partícula es en el estado  $\psi$  y  $H$  es el Hamiltoniano que describe el movimiento, entonces  $\mu_\psi$  es la distribución de la energía de la partícula. Es decir, si medimos la energía  $E$  la probabilidad que  $E \in A$  para un  $A \in \mathcal{B}$  es igual a  $\mu_\psi(A)$ .

# Interpretación en mecánica cuántica

- Si  $\psi$  es un estado tenemos  
 $\mu_\psi(\mathbb{R}) = \langle \psi, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(H)\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2 = 1$ , entonces  $\mu_\psi$  es una medida de probabilidad
- Si una partícula es en el estado  $\psi$  y  $H$  es el Hamiltoniano que describe el movimiento, entonces  $\mu_\psi$  es la distribución de la energía de la partícula. Es decir, si medimos la energía  $E$  la probabilidad que  $E \in A$  para un  $A \in \mathcal{B}$  es igual a  $\mu_\psi(A)$ .

## Teorema (Conservación de la energía)

*La distribución de la energía no se cambia:*

$$\mu_{\psi_t}(f) = \langle \psi_t, f(H)\psi_t \rangle = \langle \psi_0, e^{itH} f(H) e^{-itH} \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, f(H)\psi_0 \rangle = \mu_{\psi_0}(f)$$

# Interpretación en mecánica cuántica

- Si  $\psi$  es un estado tenemos

$\mu_\psi(\mathbb{R}) = \langle \psi, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(H)\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2 = 1$ , entonces  $\mu_\psi$  es una medida de probabilidad

- Si una partícula es en el estado  $\psi$  y  $H$  es el Hamiltoniano que describe el movimiento, entonces  $\mu_\psi$  es la distribución de la energía de la partícula. Es decir, si medimos la energía  $E$  la probabilidad que  $E \in A$  para un  $A \in \mathcal{B}$  es igual a  $\mu_\psi(A)$ .

## Teorema (Conservación de la energía)

*La distribución de la energía no se cambia:*

$$\mu_{\psi_t}(f) = \langle \psi_t, f(H)\psi_t \rangle = \langle \psi_0, e^{itH} f(H) e^{-itH} \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, f(H)\psi_0 \rangle = \mu_{\psi_0}(f)$$

- Otras 'observables'  $O$  de física también están modelados por operadores auto-adjuntos  $T_O$ . Para un estado  $\psi$  sea  $\mu_{\psi,O}$  la medida espectral de  $T_O$  en  $\psi$ . Entonces,  $\mu_{\psi,O}$  es la distribución de observable  $O$ ; la probabilidad que  $O \in A$  para  $A \in \mathcal{B}$  es  $\mu_{\psi,O}(A)$ .

- Sea  $H$  auto-adjunto y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-medible y acotado. Entonces, existe un operador unico  $f(H) \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$  auto-adjunto tal que para cada  $\psi \in \mathbb{H}$  tenemos  $\langle \psi, f(H)\psi \rangle = \int f(x)d\mu_\psi(x)$ .
- Con  $\mu_{\mathbf{u}+i\mathbf{v}}(f) = \mu_{\mathbf{u}}(f) + \mu_{\mathbf{v}}(f) + i(\langle \mathbf{u}, f(H)\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, f(H)\mathbf{u} \rangle)$  y  $\mu_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(f) = \mu_{\mathbf{u}}(f) + \mu_{\mathbf{v}}(f) + \langle \mathbf{u}, f(H)\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, f(H)\mathbf{u} \rangle$  obtenemos

$$2\langle \mathbf{u}, f(H)\mathbf{v} \rangle = [\mu_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} - i\mu_{\mathbf{u}+i\mathbf{v}} + (i-1)(\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{v}})](f)$$

y así se puede definir  $f(H)$ .

- El operador  $f \mapsto f(H)$  de  $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$  (funciones medibles acotadas) a  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$  es lineal.

- Sea  $H$  auto-adjunto y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-medible y acotado. Entonces, existe un operador unico  $f(H) \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$  auto-adjunto tal que para cada  $\psi \in \mathbb{H}$  tenemos  $\langle \psi, f(H)\psi \rangle = \int f(x)d\mu_\psi(x)$ .
- Con  $\mu_{\mathbf{u}+i\mathbf{v}}(f) = \mu_{\mathbf{u}}(f) + \mu_{\mathbf{v}}(f) + i(\langle \mathbf{u}, f(H)\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, f(H)\mathbf{u} \rangle)$  y  $\mu_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(f) = \mu_{\mathbf{u}}(f) + \mu_{\mathbf{v}}(f) + \langle \mathbf{u}, f(H)\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, f(H)\mathbf{u} \rangle$  obtenemos

$$2\langle \mathbf{u}, f(H)\mathbf{v} \rangle = [\mu_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} - i\mu_{\mathbf{u}+i\mathbf{v}} + (i-1)(\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{v}})](f)$$

y así se puede definir  $f(H)$ .

- El operador  $f \mapsto f(H)$  de  $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$  (funciones medibles acotadas) a  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$  es lineal.
- Similar como antes se puede obtener:
  - $f(H)g(H) = (fg)(H)$ ,  $f(H)^* = \bar{f}(H)$ .
  - $\|f(H)\| \leq \sup_{x \in \sigma(H)} |f(x)|$

## Proposición

Para  $A \in \mathcal{B}$ ,  $1_A(H)$  es la proyección ortogonal de  $\mathbb{H}$  a  $\mathbb{H}_A = \{\psi : \mu_\psi(\mathbb{R} \setminus A) = 0\}$ . Particularmente,  $\mathbb{H}_A$  es un sub-espacio cerrado de  $\mathbb{H}$ . Además, para  $A \cap B = \emptyset$  los espacios  $\mathbb{H}_A$  y  $\mathbb{H}_B$  son ortogonal y  $\mathbb{H}_A \oplus \mathbb{H}_B = \mathbb{H}_{A \cup B}$ . Además,  $H(\mathbb{H}_A) \subset \mathbb{H}_A$ .

## Demostración.

$P = 1_A(H)$  es auto-adjunto y  $P^2 = (1_A(H))^2 = 1_A(H) = P$  y por eso  $P$  es una proyección ortogonal.  $\mu_{P\psi}(1_{\mathbb{R} \setminus A}) = \langle P\psi, 1_{\mathbb{R} \setminus A}(H)1_A(H)\psi \rangle = 0$  porque  $1_{\mathbb{R} \setminus A}(H)1_A(H) = \mathbf{0}$ . Entonces  $P\psi \in \mathbb{H}_A$ .

Para  $\psi \in \mathbb{H}_A$ ,  $\|P\psi\|^2 = \langle \psi, P^*P\psi \rangle = \mu_\psi(1_A) = \mu_\psi(1_{\mathbb{R}}) = \|\psi\|^2$  y por eso  $P\psi = \psi$  ( $P$  proyección ortogonal)

Con  $1_A 1_B = \mathbf{0}$  y  $1_A + 1_B = 1_{A \cup B}$  se obtiene que  $\mathbb{H}_B$  es el cumplido ortogonal de  $\mathbb{H}_A \subset \mathbb{H}_{A \cup B}$  en  $\mathbb{H}_{A \cup B}$ .

El ultimo hecho viene de  $1_A(H)H = H1_A(H)$ . □

- Sea  $\text{Ort}(\mathbb{H})$  el conjunto de proyecciones ortogonales en  $\mathbb{H}$ . La función  $\mathcal{E} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Ort}(\mathbb{H}) : \mathcal{E}(A) = 1_A(H)$  define una **medida con valores en proyecciones ortogonales de  $\mathbb{H}$** . Este medida se llama la **medida espectral de  $H$** .

Se puede definir integrales con valores en  $\mathcal{B}(\mathbb{H})$  y se puede escribir

$$f(H) = \int f(E) d\mathcal{E}(E)$$

Particularmente:

## Teorema

*Para un operador auto-adjunto (acotada)  $H$  sobre  $\mathbb{H}$  existe una medida espectral única  $\mathcal{E} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Ort}(\mathbb{H})$  tal que*

$$H = \int E d\mathcal{E}(E), \quad f(H) = \int f(E) d\mathcal{E}(E)$$



# Decomposición referente de tipo del espectro

- Similar como para medidas se puede obtener una decomposición (ortogonal)  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ac} \oplus \mathcal{E}_{sc} \oplus \mathcal{E}_{pp}$ 
  - $\mathcal{E}_{ac}$  abs. continua ( $\text{Leb}(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{ac}(A) = \mathbf{0}$ ),
  - $\mathcal{E}_{sc}$  sing. continua,  $\mathcal{E}_{sc}(\{a\}) = \mathbf{0}$ ,  $\exists A : \text{Leb}(A) = 0 \wedge \mathcal{E}_{sc}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbf{0}$
  - $\mathcal{E}_{pp}$  es puro punto,  $\mathcal{E}_{pp} = \sum_{j \in J} \delta_{E_j} P_j$
  - $(E_j)_{j \in J}$  son todos los auto-valores de  $H$  y  $P_j$  las proyecciones a los auto-espacios correspondientes

# Decomposición referente de tipo del espectro

- Similar como para medidas se puede obtener una decomposición (ortogonal)  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ac} \oplus \mathcal{E}_{sc} \oplus \mathcal{E}_{pp}$   
 $\mathcal{E}_{ac}$  abs. continua ( $\text{Leb}(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{ac}(A) = \mathbf{0}$ ),  
 $\mathcal{E}_{sc}$  sing. continua,  $\mathcal{E}_{sc}(\{a\}) = \mathbf{0}$ ,  $\exists A : \text{Leb}(A) = 0 \wedge \mathcal{E}_{sc}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbf{0}$   
 $\mathcal{E}_{pp}$  es puro punto,  $\mathcal{E}_{pp} = \sum_{j \in J} \delta_{E_j} P_j$   
 $(E_j)_{j \in J}$  son todos los auto-valores de  $H$  y  $P_j$  las proyecciones a los auto-espacios correspondientes
- Tenemos  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{ac} \oplus \mathbb{H}_{sc} \oplus \mathbb{H}_{pp}$  (suma ortogonal) para
  - $\mathbb{H}_{ac} := \{\psi \in \mathbb{H} : \mu_\psi \text{ es absolutamente continua}\} = \text{Ran } \mathcal{E}_{ac}(\mathbb{R})$
  - $\mathbb{H}_{sc} := \{\psi \in \mathbb{H} : \mu_\psi \text{ es singular continua}\} = \text{Ran } \mathcal{E}_{sc}(\mathbb{R})$
  - $\mathbb{H}_{pp} := \{\psi \in \mathbb{H} : \mu_\psi \text{ es puro punto}\} = \text{Ran } \mathcal{E}_{pp}(\mathbb{R})$

# Descomposición referente de tipo del espectro

- Similar como para medidas se puede obtener una descomposición (ortogonal)  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ac} \oplus \mathcal{E}_{sc} \oplus \mathcal{E}_{pp}$   
 $\mathcal{E}_{ac}$  abs. continua ( $\text{Leb}(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{ac}(A) = \mathbf{0}$ ),  
 $\mathcal{E}_{sc}$  sing. continua,  $\mathcal{E}_{sc}(\{a\}) = \mathbf{0}$ ,  $\exists A : \text{Leb}(A) = 0 \wedge \mathcal{E}_{sc}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbf{0}$   
 $\mathcal{E}_{pp}$  es puro punto,  $\mathcal{E}_{pp} = \sum_{j \in J} \delta_{E_j} P_j$   
 $(E_j)_{j \in J}$  son todos los auto-valores de  $H$  y  $P_j$  las proyecciones a los auto-espacios correspondientes
- Tenemos  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{ac} \oplus \mathbb{H}_{sc} \oplus \mathbb{H}_{pp}$  (suma ortogonal) para
  - $\mathbb{H}_{ac} := \{\psi \in \mathbb{H} : \mu_\psi \text{ es absolutamente continua}\} = \text{Ran } \mathcal{E}_{ac}(\mathbb{R})$
  - $\mathbb{H}_{sc} := \{\psi \in \mathbb{H} : \mu_\psi \text{ es singular continua}\} = \text{Ran } \mathcal{E}_{sc}(\mathbb{R})$
  - $\mathbb{H}_{pp} := \{\psi \in \mathbb{H} : \mu_\psi \text{ es puro punto}\} = \text{Ran } \mathcal{E}_{pp}(\mathbb{R})$
- $H(\mathbb{H}_\sharp) \subset \mathbb{H}_\sharp$  para  $\sharp = ac, sc, pp$ . Se define  $H_\sharp = H|_{\mathbb{H}_\sharp} : \mathbb{H}_\sharp \rightarrow \mathbb{H}_\sharp$ ,  $\mathcal{E}_\sharp$  es la medida espectral de  $H_\sharp$ ;  $\sigma_\sharp(H) = \sigma(H_\sharp)$  es el espectro a.c., s.c. y p.p. de  $H$  ( $\sharp = ac, sc, pp$ ).  $\sigma_{pp}(H)$  es la clausura de conjunto de auto-valores.

- Sea  $H$  auto-adjunto,  $A \subset \sigma(H)$ ,  $A \in \mathcal{B}$ , típicamente consideramos intervalos  $A = [a, b]$ . Decimos que:
  - El espectro de  $H$  es puramente puro punto si  $\sigma_{ac}(H) = \emptyset$  y  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$ .
  - El espectro de  $H$  es puramente puro punto en  $A$  si  $\mathbb{H}_{ac} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$  y  $\mathbb{H}_{sc} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$
  - El espectro de  $H$  es puramente absolutamente continua si  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$  y  $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$ .
  - El espectro de  $H$  es puramente absolutamente continua en  $A$  si  $\mathbb{H}_{sc} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$  y  $\mathbb{H}_{pp} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$
  - El espectro de  $H$  es puramente singular continua si  $\sigma_{ac}(H) = \emptyset$  y  $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$ .
  - El espectro de  $H$  es puramente singular continua en  $A$  si  $\mathbb{H}_{ac} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$  y  $\mathbb{H}_{pp} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$

# Espectros puros, localización espectral

- Sea  $H$  auto-adjunto,  $A \subset \sigma(H)$ ,  $A \in \mathcal{B}$ , típicamente consideramos intervalos  $A = [a, b]$ . Decimos que:
  - El espectro de  $H$  es puramente puro punto si  $\sigma_{ac}(H) = \emptyset$  y  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$ .
  - El espectro de  $H$  es puramente puro punto en  $A$  si  $\mathbb{H}_{ac} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$  y  $\mathbb{H}_{sc} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$
  - El espectro de  $H$  es puramente absolutamente continua si  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$  y  $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$ .
  - El espectro de  $H$  es puramente absolutamente continua en  $A$  si  $\mathbb{H}_{sc} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$  y  $\mathbb{H}_{pp} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$
  - El espectro de  $H$  es puramente singular continua si  $\sigma_{ac}(H) = \emptyset$  y  $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$ .
  - El espectro de  $H$  es puramente singular continua en  $A$  si  $\mathbb{H}_{ac} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$  y  $\mathbb{H}_{pp} \cap \mathbb{H}_A = \{0\}$
- $H$  tiene localización espectral en  $A$  si el espectro es puramente puro punto en  $A$ .  $\mathcal{E}_{pp}$  es relacionado con localización: Si  $H\psi_0 = E\psi_0$  se obtiene no movimiento de distribución de lugar de partícula

$$\psi_t = e^{-itH}\psi_0 = e^{-itE}\psi_0 \quad \text{por eso} \quad |\psi_t(y)|^2 = |\psi_0(y)|^2$$